РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕЖДУНАРОДНОЙ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ, ПОСВЯЩЁННОЙ ВСЕМИРНО ИЗВЕСТНОМУ ПЕРСИДСКО-ТАДЖИКСКОМУ УЧЁНОМУ – ЭНЦИКЛОПЕДИСТУ ОМАРУ ХАЙЯМУ

SOLVING PROBLEMS OF THE INTERNATIONAL INTERNET OLYMPIAD IN MATHEMATICS DEDICATED TO THE WORLD-FAMOUS PERSIAN-TAJIK SCIENTIST – ENCYCLOPEDIST OMAR KHAYYAM

(23-25.11.2023)

1. Числа $a<b<c$ являются корнями уравнения $x^3-3x+1=0$. Найти: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

Решение. Из теоремы Виета для кубического уравнения вытекает, что $a+b+c=0$, $ab+bc+ac=-3,\quad abc=-1.$ Пусть $u=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $\vartheta=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$. Найдём сумму и произведение этих чисел:

$$u+\vartheta=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)}{abc}=$$
$$=\frac{ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+b+c)-3abc}{abc}=$$
$$=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ac)-3abc}{abc}=\frac{0-3(-1)}{-1}=-3.$$
$$u\cdot\vartheta=1+\frac{ac}{b^2}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+1+\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{c^2}{ab}+1=$$
$$=3+\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=3+\frac{b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3}{a^2b^2c^2}+$$
$$+\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3+\frac{a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3}{a^2b^2c^2}+\frac{a^4bc+ab^4c+abc^4}{a^2b^2c^2}=$$
$$=3+\frac{a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3+(a^3+b^3+c^3)abc}{a^2b^2c^2}.$$

Используя равенства $a^3-3a+1=0,\ b^3-3b+1=0$ и $c^3-3c+1=0$, получим:

$$a^3+b^3+c^3=3(a+b+c)-3=3\cdot0-3=-3;$$

$$a^3b^3=(3a-1)(3b-1)=9ab-3a-3b+1;$$
$$b^3c^3=(3b-1)(3c-1)=9bc-3b-3c+1;$$
$$a^3c^3=(3a-1)(3c-1)=9ac-3a-3c+1.$$

Отсюда:

$$a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3=9(ab+bc+ac)-6(a+b+c)+3=$$
$$=9\cdot(-3)-6\cdot0+3=-24.$$

Итак, $u \cdot \vartheta = 3 + \frac{-24 + (-3)(-1)}{(-1)^2} = -18.$ Из обратной теоремы Виета имеем:

$$t^2 + 3t - 18 = 0; \quad t_1 = -6, \quad t_2 = 3.$$

Таким образом, $u_1 = -6,\ \vartheta_1 = 3;\ u_2 = 3,\ \vartheta_2 = -6.$ Теперь определим, что какое из равенств $u = -6$ *или* $u = 3$ может быт ответом задачи. С этой целью рассмотрим разность *u* и ϑ:

$$u - \vartheta = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

Поскольку $a < b < c$, то $u - \vartheta < 0$. Следовательно,

$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = -6.$$

Ответ: - 6.

2. Для каких значений параметра а, следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} \left|11 - 14\sqrt{\cos\frac{\pi x}{4}}\right| - \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi x}{4}} - 1\right| = 3 + \left|-20\sqrt{\cos\frac{\pi x}{4}} - 7\right| + \sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y)}{12}}, \\ 2\left[(x-a)^2 + y^2 + 2y\right] + 1 = 2\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + 2y + \frac{1}{4}}. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы после использования подстановок

$$t = \sqrt{\cos\frac{\pi x}{4}} \quad \text{и} \quad u = \sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y)}{12}},$$

где $0 \le t \le 1,\ \ 0 \le u \le 1$, примет следующий вид:

$$|11 - 14t| - |2t - 1| = 3 + |20t + 7| + u. \tag{1}$$

Очевидно, что $|20t + 7| = 20t + 7$. Следовательно, достаточно рассматривать уравнение (1) только в случаях $t \le \frac{1}{2};\ \frac{1}{2} < t < \frac{11}{14};\ t \ge \frac{11}{14}$.

Пусть $t \le \frac{1}{2}$, тогда уравнение (1) примет вид

$$11 - 14t + 2t - 1 = 3 + 20t + 7 + u$$

Отсюда:

$$32t + u = 0.$$

Так как $t \geq 0$ и $u \geq 0$, поэтому t=0 ва u=0. При этом значение t=0 удовлетворяет условию $t \leq \frac{1}{2}$.

Теперь предположим, что $\frac{1}{2} < t < \frac{11}{14}$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$11 - 14t - (2t - 1) = 3 + 20t + 7 + u \text{ ё } 36t + u = 2.$$

Умножая обе части двухстороннего неравенства $\frac{1}{2} < t < \frac{11}{14}$ на 36, получим:

$$18 < 36t < \frac{198}{7}.$$

Складывая соответствующие части этого неравенства и неравенства $0 \leq u \leq 1$, придём к неравенствам $18 < 36t + u < \frac{205}{7}$. Из этих соотношений вытекает, что $36t + u$ не может быть равным к 2. Итак, уравнение (1) в случае $\frac{1}{2} < t < \frac{11}{14}$ не имеет решения.

Наконец, если $t \geq \frac{11}{14}$, то уравнение (1) примет следующий вид:

$$-(11 - 14t) - (2t - 1) = 3 + 20t + 7 + u \text{ ё } 8t + u = -20.$$

Это уравнение не имеет решения, так как $t \geq \frac{11}{14}$ и $u \geq 0$.

Таким образом, уравнение (1) имеет только одно решение: t=0; u=0. Возвращаясь к исходным переменным, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{4} = 0, \\ \sin\dfrac{\pi(x - 2y)}{12} = 0. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi x}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \\ \dfrac{\pi(x - 2y)}{12} = \pi k,\ k \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + 4n, \\ x - 2y = 12k; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + 4n, \\ y = 1 + 2n - 6k. \end{cases} \qquad (2)$$

Теперь вернёмся ко второму уравнению системы. Ради простоты введём новую переменную $z = (x - a)^2 + y^2 + 2y$. Тогда

$$2z + 1 = 2\sqrt{z + \frac{1}{4}}.$$

Решим полученное иррациональное уравнение:

$$4z^2 + 4z + 1 = 4z + 1; \quad 4z^2 = 0; \quad z = 0.$$

Найденное значение z=0 удовлетворяет уравнению. Следовательно,

$$(x-a)^2+y^2+2y=0; \qquad (x-a)^2+(y+1)^2=1. \tag{3}$$

Итак, задача свелась к отысканию целых решений уравнения (3), переменные которого удовлетворяют условию (2). Из уравнения (3) видно, что $(y+1)^2 \le 1$. Следовательно, y может принимать только значения -2, -1 и 0.

Пусть y=-2, тогда $1+2n-6k=-2$ или $2n-6k+3=0$. Последнее равенство перепишем в виде $n=3k+\frac{3}{2}$ и убедимся в том, что оно не выполняется для всяких целых значений n и k. Поэтому уравнение (3) в этом случае не имеет решения.

В случае y=-1 получим равенство $1+2n-6k=-1$ или $n=3k-1$. Подставляя эти значения в уравнение (3), найдём:

$$(12k-2-a)^2+(-1+1)^2=1; \qquad 12k-2-a=\pm 1;$$
$$a_1=12k-3; \qquad a_2=12k-1.$$

Если y=0, то $1+2n-6k=0$ или $n=3k-\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что уравнение (3) в данном случае не имеет решения.

Ответ: для значений $a=12k-3;\ a=12k-1,\ k\in Z$.

3. Дана следующая матрица $=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти: ^{n}.

Решение. Имеем: $A=E+B$, где $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Легко проверить, что $\mathrm{B}^3=0$.

Тогда

$$^n=(\mathrm{E}+\mathrm{B})^n=\mathrm{E}+n\cdot\mathrm{B}+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\mathrm{B}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+$$

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ -n & \dfrac{n^2-n+2}{2} & -\dfrac{n^2-n}{2} \\ -n & \dfrac{n^2-n}{2} & -\dfrac{n^2+n-2}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $^n=\begin{pmatrix} 1 & -n & n \\ -n & \frac{n^2-n+2}{2} & -\frac{n^2-n}{2} \\ -n & \frac{n^2-n}{2} & -\frac{n^2-n-2}{2} \end{pmatrix}$.

4. Найдите все функции $f\colon Z\to Z$ такие, что $n^2+4f(n)=f(f(n))^2$ для всех $n\in Z$.

4. Find all functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that

$$n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2 \tag{1}$$

for all $n \in \mathbb{Z}$.

Answer. The possibilities are:

- $f(n) = n + 1$ for all n;
- or, for some $a \geqslant 1$, $f(n) = \begin{cases} n+1, & n > -a, \\ -n+1, & n \leqslant -a; \end{cases}$
- or $f(n) = \begin{cases} n+1, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -n+1, & n < 0. \end{cases}$

Solution 1.

Part I. Let us first check that each of the functions above really satisfies the given functional equation. If $f(n) = n + 1$ for all n, then we have

$$n^2 + 4f(n) = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 = f(n+1)^2 = f(f(n))^2.$$

If $f(n) = n + 1$ for $n > -a$ and $f(n) = -n + 1$ otherwise, then we have the same identity for $n > -a$ and

$$n^2 + 4f(n) = n^2 - 4n + 4 = (2-n)^2 = f(1-n)^2 = f(f(n))^2$$

otherwise. The same applies to the third solution (with $a = 0$), where in addition one has

$$0^2 + 4f(0) = 0 = f(f(0))^2.$$

Part II. It remains to prove that these are really the only functions that satisfy our functional equation. We do so in three steps:

Step 1: We prove that $f(n) = n + 1$ for $n > 0$.

Consider the sequence (a_k) given by $a_k = f^k(1)$ for $k \geqslant 0$. Setting $n = a_k$ in (1), we get

$$a_k^2 + 4a_{k+1} = a_{k+2}^2.$$

Of course, $a_0 = 1$ by definition. Since $a_2^2 = 1 + 4a_1$ is odd, a_2 has to be odd as well, so we set $a_2 = 2r + 1$ for some $r \in \mathbb{Z}$. Then $a_1 = r^2 + r$ and consequently

$$a_3^2 = a_1^2 + 4a_2 = (r^2 + r)^2 + 8r + 4.$$

Since $8r + 4 \neq 0$, $a_3^2 \neq (r^2 + r)^2$, so the difference between a_3^2 and $(r^2 + r)^2$ is at least the distance from $(r^2 + r)^2$ to the nearest even square (since $8r + 4$ and $r^2 + r$ are both even). This implies that

$$|8r + 4| = \left|a_3^2 - (r^2 + r)^2\right| \geqslant (r^2 + r)^2 - (r^2 + r - 2)^2 = 4(r^2 + r - 1),$$

(for $r = 0$ and $r = -1$, the estimate is trivial, but this does not matter). Therefore, we ave

$$4r^2 \leqslant |8r + 4| - 4r + 4.$$

If $|r| \geqslant 4$, then

$$4r^2 \geqslant 16|r| \geqslant 12|r| + 16 > 8|r| + 4 + 4|r| + 4 \geqslant |8r + 4| - 4r + 4,$$

a contradiction. Thus $|r| < 4$. Checking all possible remaining values of r, we find that $(r^2 + r)^2 + 8r + 4$ is only a square in three cases: $r = -3$, $r = 0$ and $r = 1$. Let us now distinguish these three cases:

- $r = -3$, thus $a_1 = 6$ and $a_2 = -5$. For each $k \geqslant 1$, we have

$$a_{k+2} = \pm\sqrt{a_k^2 + 4a_{k+1}},$$

  and the sign needs to be chosen in such a way that $a_{k+1}^2 + 4a_{k+2}$ is again a square. This yields $a_3 = -4$, $a_4 = -3$, $a_5 = -2$, $a_6 = -1$, $a_7 = 0$, $a_8 = 1$, $a_9 = 2$. At this point we have reached a contradiction, since $f(1) = f(a_0) = a_1 = 6$ and at the same time $f(1) = f(a_8) = a_9 = 2$.

- $r = 0$, thus $a_1 = 0$ and $a_2 = 1$. Then $a_3^2 = a_1^2 + 4a_2 = 4$, so $a_3 = \pm 2$. This, however, is a contradiction again, since it gives us $f(1) = f(a_0) = a_1 = 0$ and at the same time $f(1) = f(a_2) = a_3 = \pm 2$.

- $r = 1$, thus $a_1 = 2$ and $a_2 = 3$. We prove by induction that $a_k = k + 1$ for all $k \geqslant 0$ in this case, which we already know for $k \leqslant 2$ now. For the induction step, assume that $a_{k-1} = k$ and $a_k = k + 1$. Then

$$a_{k+1}^2 = a_{k-1}^2 + 4a_k = k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2,$$

  so $a_{k+1} = \pm(k + 2)$. If $a_{k+1} = -(k + 2)$, then

$$a_{k+2}^2 = a_k^2 + 4a_{k+1} = (k + 1)^2 - 4k - 8 = k^2 - 2k - 7 = (k - 1)^2 - 8.$$

  The latter can only be a square if $k = 4$ (since 1 and 9 are the only two squares whose difference is 8). Then, however, $a_4 = 5$, $a_5 = -6$ and $a_6 = \pm 1$, so

$$a_7^2 = a_5^2 + 4a_6 = 36 \pm 4,$$

  but neither 32 nor 40 is a perfect square. Thus $a_{k+1} = k + 2$, which completes our induction. This also means that $f(n) = f(a_{n-1}) = a_n = n + 1$ for all $n \geqslant 1$.

Step 2: We prove that either $f(0) = 1$, or $f(0) = 0$ and $f(n) \neq 0$ for $n \neq 0$.

Set $n = 0$ in (1) to get

$$4f(0) = f(f(0))^2.$$

This means that $f(0) \geqslant 0$. If $f(0) = 0$, then $f(n) \neq 0$ for all $n \neq 0$, since we would otherwise have

$$n^2 = n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2 = f(0)^2 = 0.$$

If $f(0) > 0$, then we know that $f(f(0)) = f(0) + 1$ from the first step, so

$$4f(0) = \big(f(0) + 1\big)^2,$$

which yields $f(0) = 1$.

Step 3: We discuss the values of $f(n)$ for $n < 0$.

Lemma. For every $n \geqslant 1$, we have $f(-n) = -n + 1$ or $f(-n) = n + 1$. Moreover, if $f(-n) = -n + 1$ for some $n \geqslant 1$, then also $f(-n + 1) = -n + 2$.

Proof. We prove this statement by strong induction on n. For $n = 1$, we get

$$1 + 4f(-1) = f(f(-1))^2.$$

Thus $f(-1)$ needs to be nonnegative. If $f(-1) = 0$, then $f(f(-1)) = f(0) = \pm 1$, so $f(0) = 1$ (by our second step). Otherwise, we know that $f(f(-1)) = f(-1) + 1$, so

$$1 + 4f(-1) = \bigl(f(-1) + 1\bigr)^2,$$

which yields $f(-1) = 2$ and thus establishes the base case. For the induction step, we consider two cases:

- If $f(-n) \leqslant -n$, then

  $$f(f(-n))^2 = (-n)^2 + 4f(-n) \leqslant n^2 - 4n < (n-2)^2,$$

  so $|f(f(-n))| \leqslant n - 3$ (for $n = 2$, this case cannot even occur). If $f(f(-n)) \geqslant 0$, then we already know from the first two steps that $f(f(f(-n))) = f(f(-n)) + 1$, unless perhaps if $f(0) = 0$ and $f(f(-n)) = 0$. However, the latter would imply $f(-n) = 0$ (as shown in Step 2) and thus $n = 0$, which is impossible. If $f(f(-n)) < 0$, we can apply the induction hypothesis to $f(f(-n))$. In either case, $f(f(f(-n))) = \pm f(f(-n)) + 1$. Therefore,

  $$f(-n)^2 + 4f(f(-n)) = f(f(f(-n)))^2 = \bigl(\pm f(f(-n)) + 1\bigr)^2,$$

  which gives us

  $$\begin{aligned} n^2 &\leqslant f(-n)^2 = \bigl(\pm f(f(-n)) + 1\bigr)^2 - 4f(f(-n)) \leqslant f(f(-n))^2 + 6|f(f(-n))| + 1 \\ &\leqslant (n-3)^2 + 6(n-3) + 1 = n^2 - 8, \end{aligned}$$

  a contradiction.

- Thus, we are left with the case that $f(-n) > -n$. Now we argue as in the previous case: if $f(-n) \geqslant 0$, then $f(f(-n)) = f(-n) + 1$ by the first two steps, since $f(0) = 0$ and $f(-n) = 0$ would imply $n = 0$ (as seen in Step 2) and is thus impossible. If $f(-n) < 0$, we can apply the induction hypothesis, so in any case we can infer that $f(f(-n)) = \pm f(-n) + 1$. We obtain

  $$(-n)^2 + 4f(-n) = \bigl(\pm f(-n) + 1\bigr)^2,$$

  so either

  $$n^2 = f(-n)^2 - 2f(-n) + 1 = \bigl(f(-n) - 1\bigr)^2,$$

  which gives us $f(-n) = \pm n + 1$, or

  $$n^2 = f(-n)^2 - 6f(-n) + 1 = \bigl(f(-n) - 3\bigr)^2 - 8.$$

  Since 1 and 9 are the only perfect squares whose difference is 8, we must have $n = 1$, which we have already considered.

Finally, suppose that $f(-n) = -n + 1$ for some $n \geqslant 2$. Then

$$f(-n+1)^2 = f(f(-n))^2 = (-n)^2 + 4f(-n) = (n-2)^2,$$

so $f(-n+1) = \pm(n-2)$. However, we already know that $f(-n+1) = -n+2$ or $f(-n+1) = n$, so $f(-n+1) = -n+2$. $\square$

Combining everything we know, we find the solutions as stated in the answer:

- One solution is given by $f(n) = n + 1$ for all n.
- If $f(n)$ is not always equal to $n + 1$, then there is a largest integer m (which cannot be positive) for which this is not the case. In view of the lemma that we proved, we must then have $f(n) = -n+1$ for any integer $n < m$. If $m = -a < 0$, we obtain $f(n) = -n+1$ for $n \leqslant -a$ (and $f(n) = n + 1$ otherwise). If $m = 0$, we have the additional possibility that $f(0) = 0$, $f(n) = -n + 1$ for negative n and $f(n) = n + 1$ for positive n.

5. Пусть $\{a_n\}$ является неограниченной и возрастающей последовательностью. Известно, что для любого $i \in N$, $a_i > 0$ и его среднее арифметическое из четырех последовательных элементов относится к этой последовательности. Доказать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ сходится и найти его предел.

Решение. Согласно условию задачи a_i является возрастающей, поэтому

$$a_n < a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3},$$

$$a_n < \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}}{4} < a_{n+3}.$$

Отсюда:

$$A = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}}{4} = a_{n+1} \text{ или } a_{n+2}.$$

Возможно два случая: $A = a_{n+1}$ или $A = a_{n+2}$.

Случай 1. Имеем: $a_n + a_{n+2} + a_{n+3} = 3a_{n+1}$. Характеристическое уравнение в этом случае имеет следующий вид:

$$\lambda^n + \lambda^{n+2} + \lambda^{n+3} = 3\lambda^{n+1}, \lambda \neq 0.$$

Отсюда:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0,$$
$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 1) = 0,$$
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{2} - 1, \lambda_3 = -\sqrt{2} - 1,$$
$$a_n = a \cdot 1^n + b(-1 + \sqrt{2})^n + c(-1 - \sqrt{2})^n.$$

В данном случае $a_n < 0$, так как $-1 - \sqrt{2} < 0$.

Случай 2. Имеем: $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 4a_{n+2}$; $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$.

Характеристическое уравнение примет следующий вид:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Решив полученное уравнение, будем иметь:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{2},\ \ \lambda_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Отсюда

$$a_n = a + b(1 - \sqrt{2})^n + c(1 + \sqrt{2})^n,$$

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots.$$

Найдем теперь искомый предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a + b(1 - \sqrt{2})^{n+1} + c(1 + \sqrt{2})^{n+1}}{a + b(1 - \sqrt{2})^n + c(1 + \sqrt{2})^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{a}{(1+\sqrt{2})^n} + b\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n \left(1 - \sqrt{2}\right) + c(1 + \sqrt{2})}{\dfrac{a}{(1+\sqrt{2})^n} + b\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n + c} =$$

$$= \frac{c\left(1 + \sqrt{2}\right)}{c} = 1 + \sqrt{2}.$$

Ответ: $1 + \sqrt{2}$.

6. Доказать, что если $y(x)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 1 - x^2 - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

то $0 \le y(x) \le \frac{2}{3}$ для всех $x \in [0; 1]$.

Решение. Докажем сначала оценку сверху для $y(x)$. Для этого проинтегрируем обе части уравнения от нуля до x:

$$\int_0^x y'(x)dx = \int_0^x (1 - x^2 - y^2)dx.$$

Учитывая, что $y(0) = 0$, имеем $y(x) = x - \frac{x^3}{3} - \int_0^x y^2 dx$, но $\int_0^x y^2 dx \ge 0$, $x \in [0; 1]$, значит $y(x) \le x - \frac{x^3}{3} \le \frac{2}{3}$, $x \in [0; 1]$. Последнее неравенство следует из того, что наибольшее значение функции $\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3}$ на отрезке $[0; 1]$ равно $\frac{3}{2}$.

Оценку снизу докажем от противного. Предположим, что существует точка $\bar{x} \in (0; 1]$ такая, что $y(\bar{x}) < 0$. Т.к. $y(0) = 0$, функция $y(x)$ дифференцируема, а значит и непрерывна, то должна существовать на отрезке $[0; \bar{x})$ оси OX точка x_0, проходя через которую график функции $y(x)$ опускается под ось OX, но тогда в этой точке $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) \le 0$. Но с другой стороны $y'(x_0) = 1 - x_0^2 - y^2(x_0) = 1 - x_0^2 > 0$. Полученное противоречие доказывает, что $y(x) \ge 0$ при всех $x \in [0; 1]$.